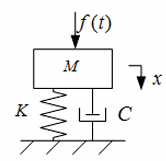
机械系统动力学

单自由度振动

**基本假设**

1. 系统运动只沿一个方向，只用一个坐标就可以定义。
2. 系统仅由三个基本元件（质量元件、弹性元件和阻尼元件）组成，且构成右图模型。
3. 系统参数全部为常数，系统是**线性、时不变**参数系统

\* 线性系统的定义

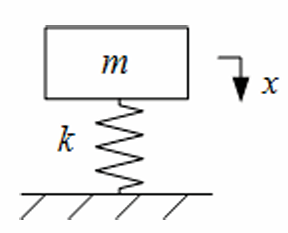
对于一个函数来说，如果其为线性，必须满足以下性质

齐次/比例性：对于任意的，都有成立，即扩大倍，也扩大倍

叠加性：若，则

1. 系统可以采用常系数、线性常微分方程表示：



**无阻尼自由振动**

数学方程：



记，原方程化为



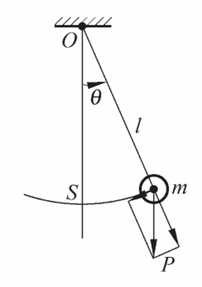
解得



其中

其中被称为系统的**固有频率**

系统的固有频率仅和系统参数有关，和初始条件无关。

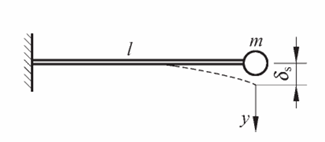
**其他类型的无阻尼自由振动**

1. 单摆





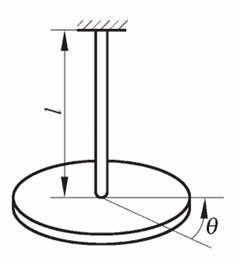
1. 轻质悬臂梁（弯曲刚度为）

梁右端横向振动时的弹簧常数



运动方程为

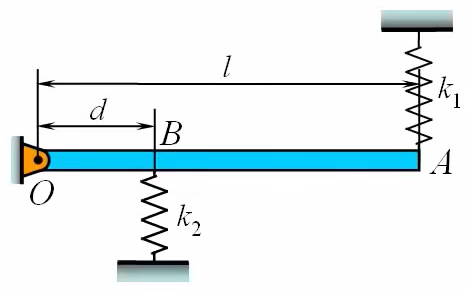


1. 扭摆（扭转弹簧系数为，圆盘对转轴的转动惯量为）



**能量法求固有频率**

以系统平衡位置为零势能位置时，计算势能时就可以不考虑重力（势能）的影响，从而有振动系统的动能最大值与势能最大值相等。

例：在图示振动系统中，摆杆对铰链点的转动惯量为，杆的点和各安置一个弹簧，刚度系数分别为和。系统在水平位置处于平衡。求：系统作微振动时的固有频率。

解：以平衡位置为零势能位置。

设摆杆作自由振动时，摆角的变化规律为



则

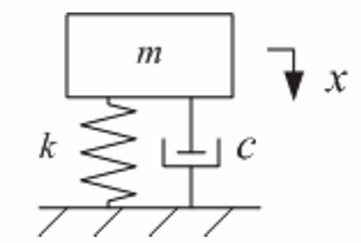
系统振动时摆杆的最大角速度

系统的最大动能为

最大势能为



得

**有阻尼自由振动**

数学方程：

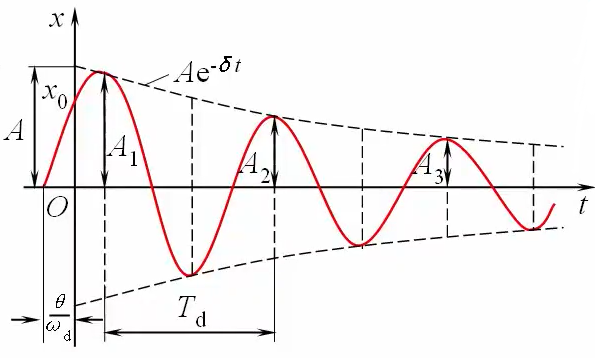


记，得到



其中被称为**系统的固有频率**，被称为**阻尼系数**

1. 欠阻尼状态

当时，**阻力系数**，令（称为**阻尼比**），欠阻尼即的情况



微分方程的解为

其中，被称为**有阻尼固有频率**

**初始幅值**，初相角

**衰减振动的周期**

\*实际上，令所有就可以得到无阻尼情况的解。

1. 临界阻尼状态

时，阻尼比，此时阻尼较大，称为**临界阻尼状态**。

此时系统的阻力系数称为**临界阻力系数**，其值为

微分方程的通解（为初始状态决定的常数）

表明物体的运动是随时间的增长而无限地趋向平衡位置。运动已不具有振动的特点。

1. 过阻尼状态

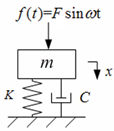
时，阻尼比，阻尼很大，称为**过阻尼状态**。

微分方程的通解为

运动也已经不具备振动的性质。

估计后两种状态的通解形式不要求掌握。

**简谐激励下的受迫振动**

数学方程：



记，得到



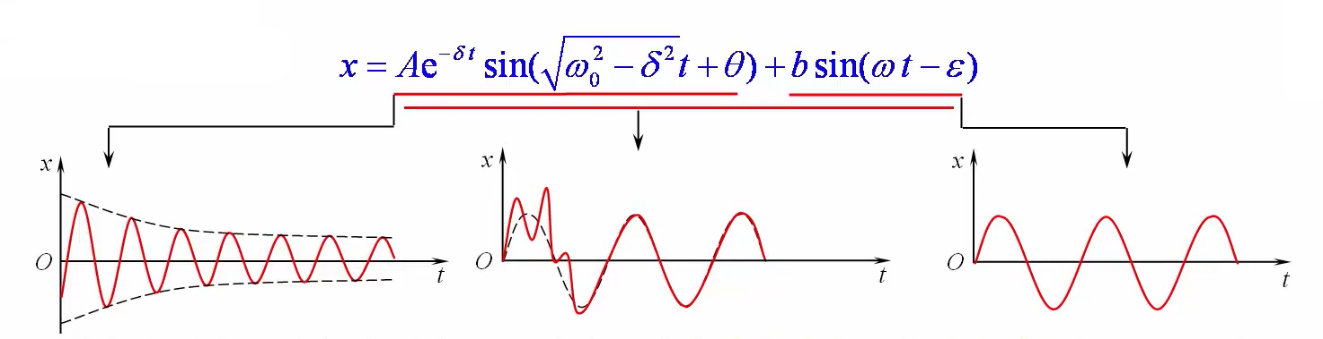
解可以写为，其中为齐次方程的通解，为方程的特解。

通解为上述有阻尼自由振动的解，即



特解可以写为

代入微分方程可以解得

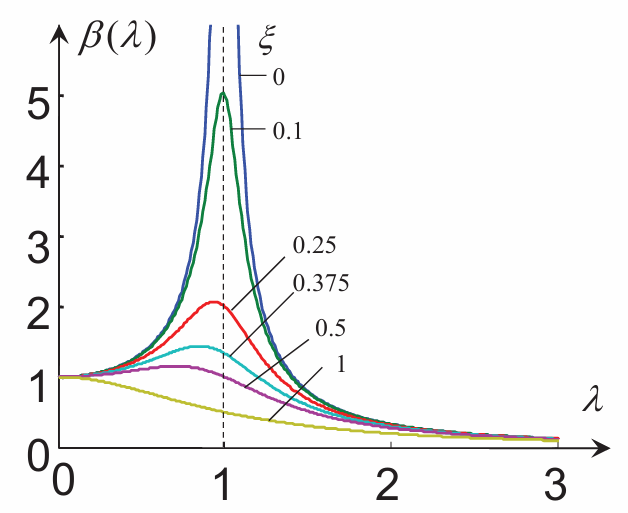
 

通解代表的是衰减振动，特解代表的是受迫振动。衰减振动有显著影响的这段振动过程称为瞬态响应；过渡过程以后的振动过程称为稳态响应。

即为受迫振动的**振幅（不考虑通解）**

**幅频特性**

中，令，即不考虑阻尼和激振力的周期，激振力为恒力，此时所谓的振幅称为静力作用下的静变形，即

去除量纲，横轴采用频率比，即激振力频率与系统固有频率的比值

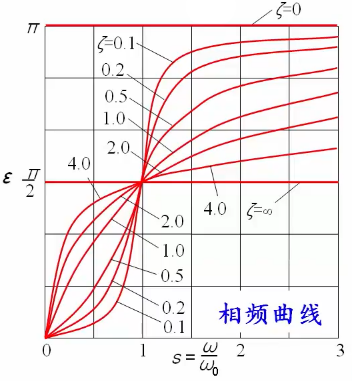
纵轴采用振幅比，表示当前振幅与静力作用下的静变形的比值

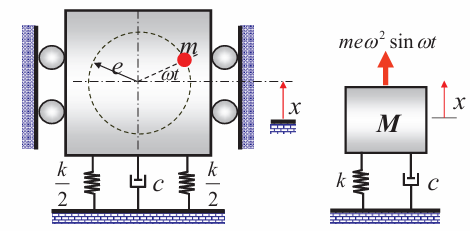
时振幅达到最大值，此时频率称为**共振频率**

此时最大振幅为

当时，振幅没有极值。

**相频特性**

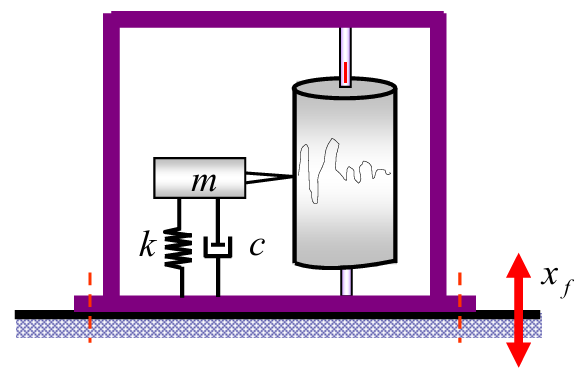
有阻尼受迫振动的相位角，总比激振力落后一个相位角，称为**相位差**。

**常见的强迫振动**

1. 旋转不平衡质量引起的强迫振动

数学模型



1. 惯性式振动传感器

振动测试仪器有三种基本形式：测试加速度、速度和位移。可以测量质量块与基座之间的相对位移（速度/加速度）。

数学模型



令

原式可化为

可知

位移传感器：

测试的频率远高于仪器的固有频率，即

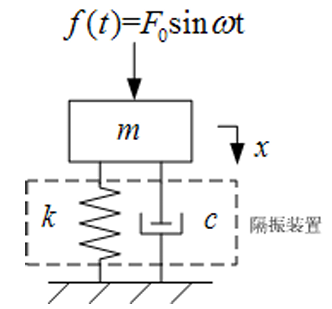
，此时

加速度传感器：

仪器的固有频率远高于测试的频率，即

，即

**隔振**

1. 积极隔振

物块是振源，通过弹性和阻尼元件减小对地力的传递。

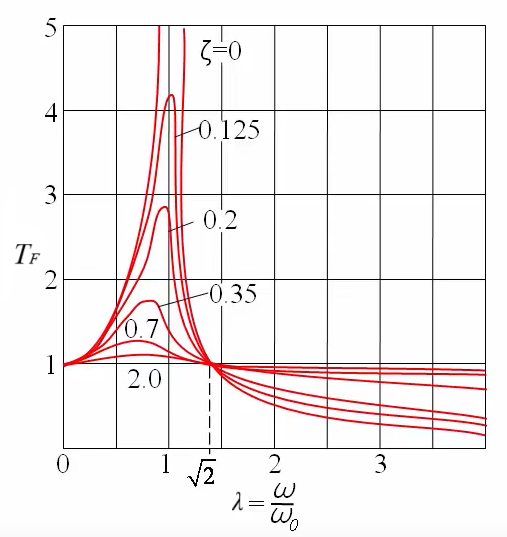
物体的振幅易知为

弹簧的作用力

阻尼的作用力

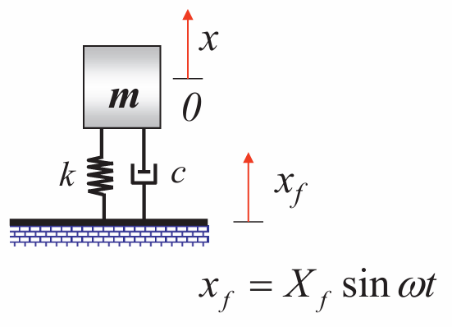
合力力幅

合力振幅与激振力力幅之比称为**力传递系数**

力的传递率

* 时，，隔振才有意义
* 固有频率越小越好，也就是说隔振弹簧的刚度系数越小越好
* 时，增大阻尼会使力幅增大，降低隔振效果
* 阻尼过小时在激振频率越过共振区时又会产生很大的振动。因此要选择合适的阻尼。

1. 消极隔振

数学模型





其中

设方程的特解（稳态）为

代入微分方程解得

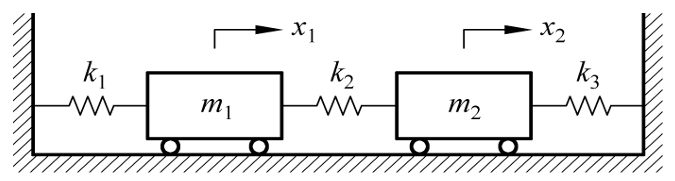
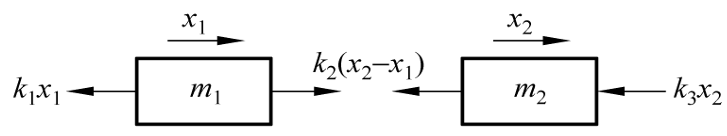


写成无量纲的形式，称为**位移传递系数**



与力传递系数形式完全相同。

两自由度系统

**数学方程**

****

整理得

****

位移向量

写为矩阵形式

刚度矩阵



质量矩阵

可以得到数学方程的一般形式



其中

设

得到**** ①

由微分方程理论，，也即

方程①化为 ②

方程具有非零解的条件为和的系数行列式等于零。



化简得



解该方程，

称为该系统的两个**固有频率**。为第一阶固有频率，又称为基频；为第二阶固有频率。当系统分别以频率和进行同步简谐运动时呈现的形状，称为系统的**固有振型**(或**主振型**)。

记时对应,时对应，





其中和称为**振型向量**或**模态向量。**

无阻尼自由运动的通解是两种不同频率的固有振动的叠加



式中常数由初始条件确定。

**坐标耦合和主坐标**

对于



或者说

****

显而易见两个方程是耦合的，不能各自独立求解。称为坐标耦合。



****

以上红圈即为耦合项。一般情况下，两自由度以上的振动系统的微分方程组都会出现耦合项，如果以矩阵形式表示，则耦合项体现在非对角元素上。振动微分方程通过刚度项来耦合，称为**静力耦合或弹性耦合。**振动微分方程通过质量项来耦合，称为**动力耦合或惯性耦合。**

取坐标变换



得到



能够使系统运动方程不存在耦合，成为相互独立方程的坐标，叫做**主坐标**或固有坐标。

**数学解**

若初始条件为

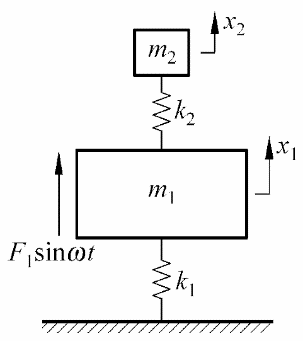
记解为



解得





**无阻尼吸振器**

考虑该系统，由质量和弹簧组成的系统称为主系统， 而由质量和弹簧组成的附加系统称为减振器。

**数学模型**



假设解为

以上方程化为



解得



记

（主系统的固有频率）

（减振器的固有频率）

（主系统的静变形）

（减振器质量对主质量的比值）

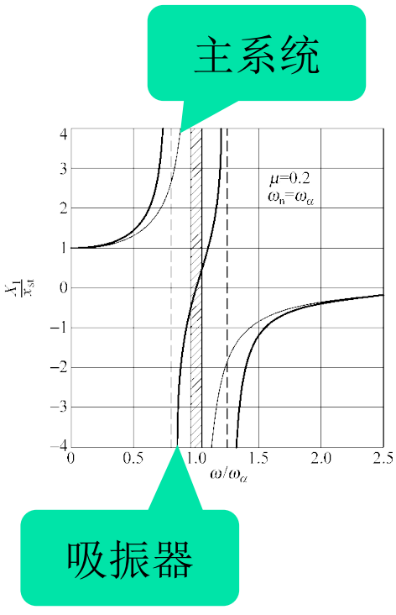
可以得到



当时，，也即

即



说明**在任何瞬时，减振器弹簧中的力正好平衡了主质量上的作用力。**

**解的分析**

* 从图中可以看出，当时，，主系统不作振动。
* 图中阴影部分是减振器工作良好的频率范围。
* 附加减振器后，系统由单自由度变为两自由度，出现了两个共振频率。
* 控制有附加减振器的振动系统的两个固有频率相距较远为好。

多自由度系统

**无阻尼多自由度振动系统数学模型**

****

它表示一组个联立的齐次微分方程组



类似二自由度系统，对于n个联立的齐次方程一定存在着同步运动的解，即在运动过程中，所有坐标应具有对时间相同的依赖关系。在数学上，这一类运动可以表示为



将解代入原方程，即



记



结合(1),(2)二式



由(2)式



(3)式可以写成矩阵形式



当且仅当系数行列式等于零时，以上方程存在非零解，即



(4)称为**特征方程**或**频率方程**。方程有个根，这些根称为特征值，它们的平方根称为系统的固有频率。将固有频率由小到大依次排列，有



基频是所有频率中最重要的一个。

当系统的质量矩阵为正定实对称矩阵，刚度矩阵为正定或半正定的实对称矩阵时，**所有的特征值都是实数，并且是正数或零**。且只有当刚度矩阵为半正定时，系统才有零特征值。

将求得的固有频率代回到

得到



其中

称向量为对应特征值的**特征向量**，也称为**振型向量**或**模态向量**，它表示了**固有振型**。

**特征向量的特征**

* 特征向量的各元素的值是不唯一确定的量，但任意两个元素的比值是一常数。
* 如果为齐次方程组的解，那么也是一个解，为任意常数。
* 固有振型的形状是唯一的，而振幅不是唯一的。
* 如果特征向量中的一个元素被指定为某一个值，那么特征向量就是唯一确定的向量。
* 前四句话表达了同一个意思，简直是废话。

**正则振型**

由上可知如果为齐次方程组的解，那么也是一个解。调整使



所得到的称为**正则振型**。

此外，由

此时的满足



**特征向量的正交性**

由，有



即



因为矩阵和为实对称矩阵，转置②，可得



与方程①相减，可得



当，即时，必须有



即**振型向量关于质量矩阵是正交的**

由此也易知

****

即**振型向量关于刚度矩阵是正交的**

显然，正交性只有当和为对称矩阵时才是正确的。

如果将振型向量正则化，则称振型向量为关于质量矩阵和刚度矩阵的正则正交性。调整使



则



式中为克朗尼格符号，其数学定义为



振型向量可以排列成为n阶方阵，称为**模态矩阵**(或**振型矩阵**)，即



引入**模态质量矩阵**和**模态刚度矩阵**



由正交性，模态质量矩阵和模态刚度矩阵都是对角矩阵。

若振型向量按照方程进行正则化，则易知





模态质量矩阵为单位矩阵，模态刚度矩阵为固有频率平方的对角矩阵。

**主坐标**

对于

****

引入另一组广义坐标，对于振型矩阵，满足



代入方程



即



得到解耦方程组



该方程组可作为n个独立的单自由度系统来处理。这里的广义坐标称为**主坐标**。特别的，若中为正则振型矩阵，则有：



这里的广义坐标称为**正则坐标。**

**对初始条件的响应**

定义正则坐标，满足，得到解耦方程组：

也即

